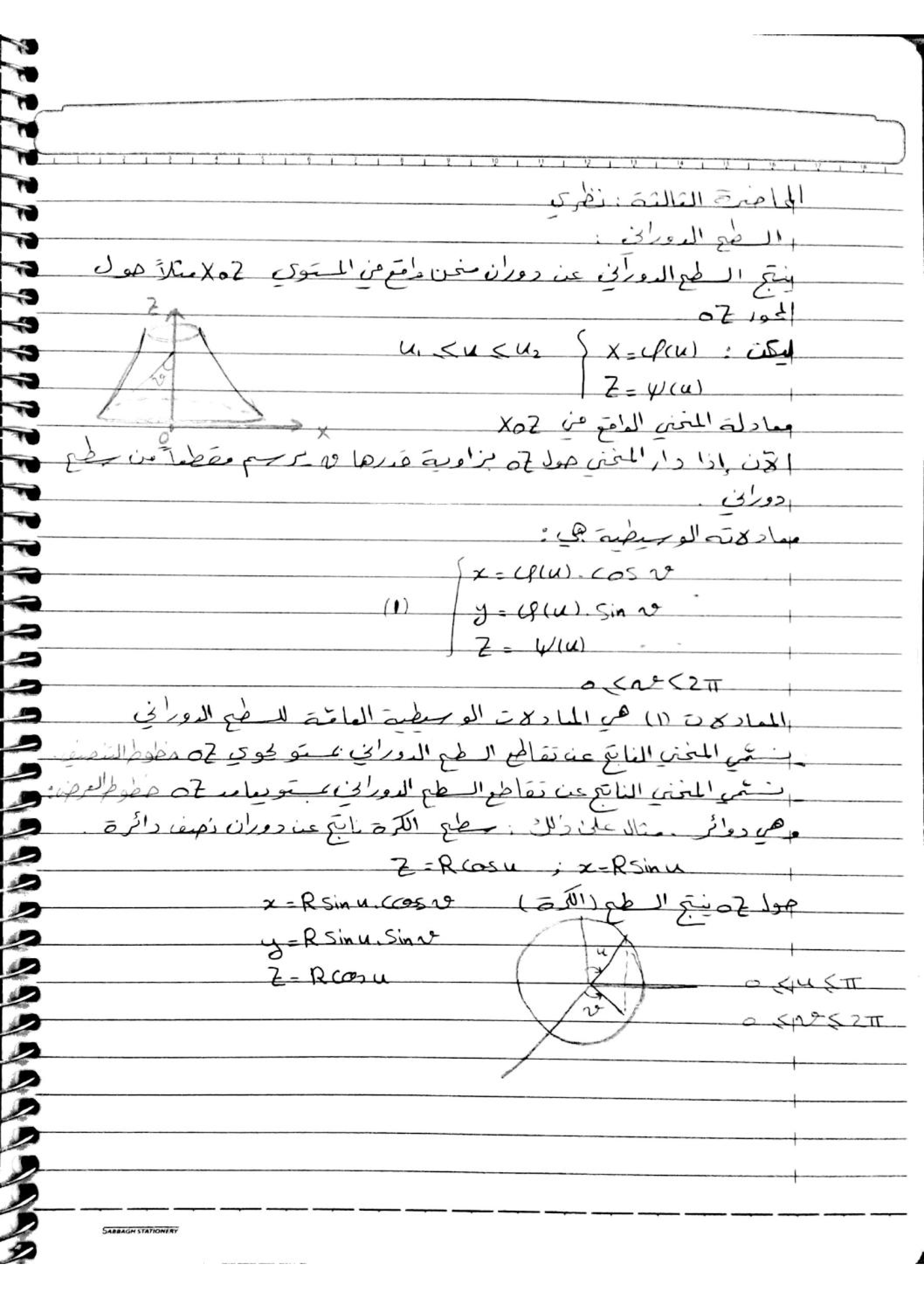


المحاضرة الثالثة: نظري

السطح الدوراني:

ينتج السطح الدوراني عن دوران منحنٍ واقع في المستوي XoZ مثلاً حول المحور oZ

ليكن: $x = \varphi(u)$ ، $Z = \psi(u)$ ، $u_1 \leq u \leq u_2$

معادلة المنحني الواقع في XoZ

الآن إذا دار المنحني حول oZ بزاوية قدرها v يرسم مقطعاً من سطح دوراني.

معادلاته الوسيطية هي:

$$(1)\quad \begin{cases} x = \varphi(u) \cdot \cos v \\ y = \varphi(u) \cdot \sin v \\ Z = \psi(u) \end{cases}$$

$$0 \leq v \leq 2\pi$$

المعادلات (1) هي المعادلات الوسيطية العامة للسطح الدوراني

يسمى المنحني الناتج عن تقاطع السطح الدوراني بمستوٍ يحوي oZ خطوط التنصيف

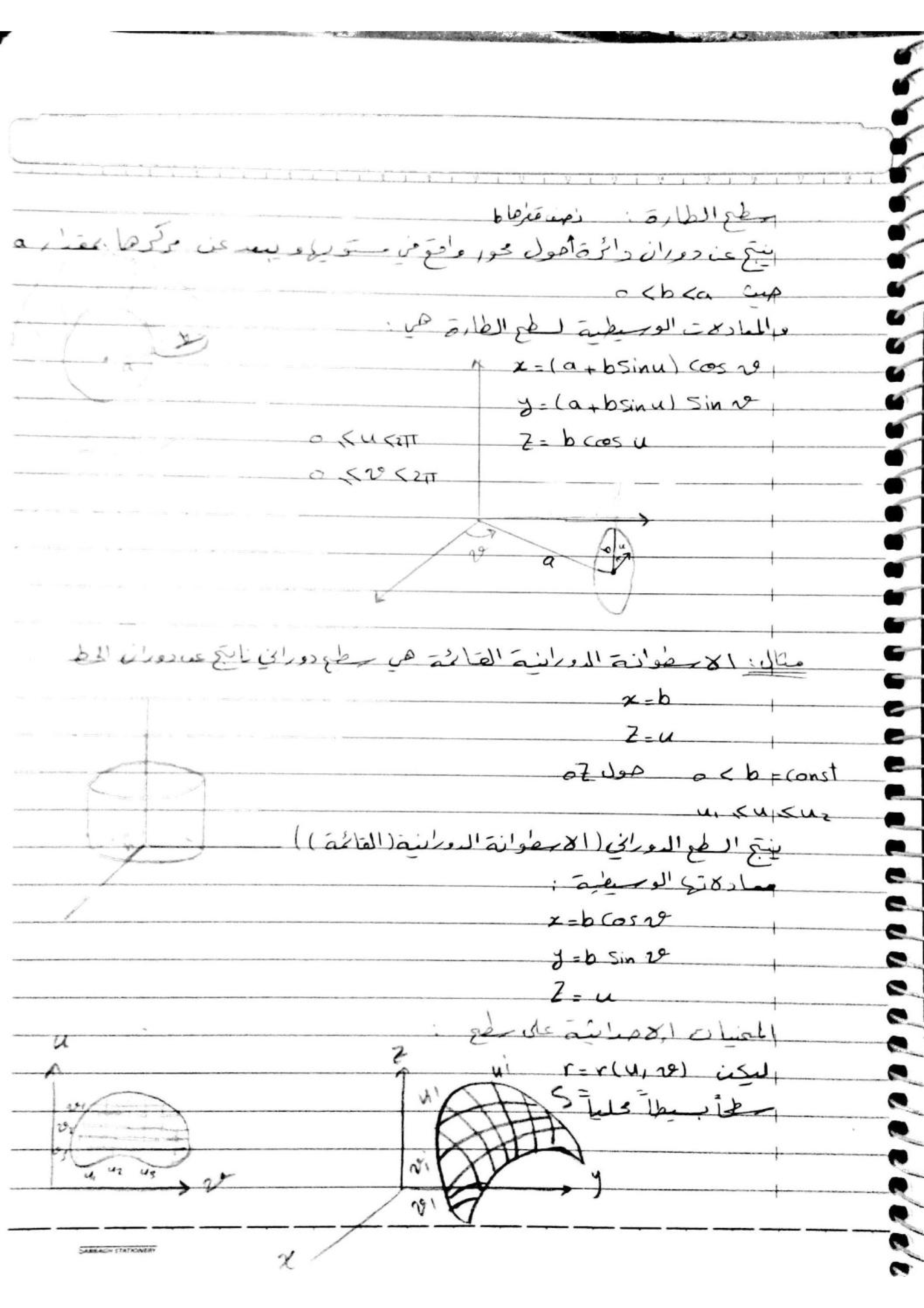
يسمى المنحني الناتج عن تقاطع السطح الدوراني بمستوٍ يعامد oZ خطوط العرض: هي دوائر. مثال على ذلك: سطح الكرة ناتج عن دوران نصف دائرة

$$Z = R\cos u \ ; \ x = R\sin u$$

حول oZ ينتج السطح (الكرة)

$$x = R\sin u \cdot \cos v$$
$$y = R\sin u \cdot \sin v$$
$$Z = R\cos u$$

$$0 \leq u \leq \pi$$
$$0 \leq v \leq 2\pi$$



سطح الطارة : نصف قطرها b

ينتج عن دوران دائرة حول محور واقع في مستويها يبعد عن مركزها بمقدار a

حيث $0 < b < a$

المعادلات الوسيطية لسطح الطارة هي :

$$x = (a + b\sin u)\cos v$$

$$y = (a + b\sin u)\sin v$$

$$z = b\cos u$$

$0 < u < 2\pi$

$0 < v < 2\pi$

مثال: الاسطوانة الدورانية القائمة هي سطح دوراني ناتج عن دوران الخط

$$x = b$$

$$z = u$$

$0 < b = const$ حول oz

$u_1 < u < u_2$

ينتج السطح الدوراني (الاسطوانة الدورانية القائمة)

معادلاته الوسيطية :

$$x = b\cos v$$

$$y = b\sin v$$

$$z = u$$

المنحنيات الاحداثية على سطح :

ليكن $r = r(u, v)$

سطحاً بسيطاً محلياً $S =$

الآن إذا ثبتنا الوسيط v من النطاق المستوي D فإن صورة الخط $u=u_0$ من النطاق D على السطح S تمثل منحنياً يسمى المنحني الاحداثي ذي الوسيط u $(v=v_0)$

وبالعكس: إذا ثبتنا الوسيط u من النطاق D فإن صورة الخط $u=u_0$ على السطح S هي منحنٍ يسمى المنحني الاحداثي ذي الوسيط v (الخط ...) فرسم المنحنيات الاحداثية على السطح S شبكة تسمى شبكة الخطوط الاحداثية

مثال: الخطوط الاحداثية على السطح الدوراني هي:

الخط الاحداثي ذي الوسيط u $(v=const)$ هو خط السمت

الخط الاحداثي ذي الوسيط v خطوط العرض

وعلى سطح الكرة:

+ الخطوط ذات الوسيط u هي خطوط الطول

+ الخطوط ذات الوسيط v هي خطوط العرض

أمّا بالنسبة لسطح الطارة:

الخط الاحداثي ذي الوسيط u هو الدائرة المولدة لسطح الطارة

الخط الاحداثي ذي الوسيط v دوائر توازي المستوي xoy

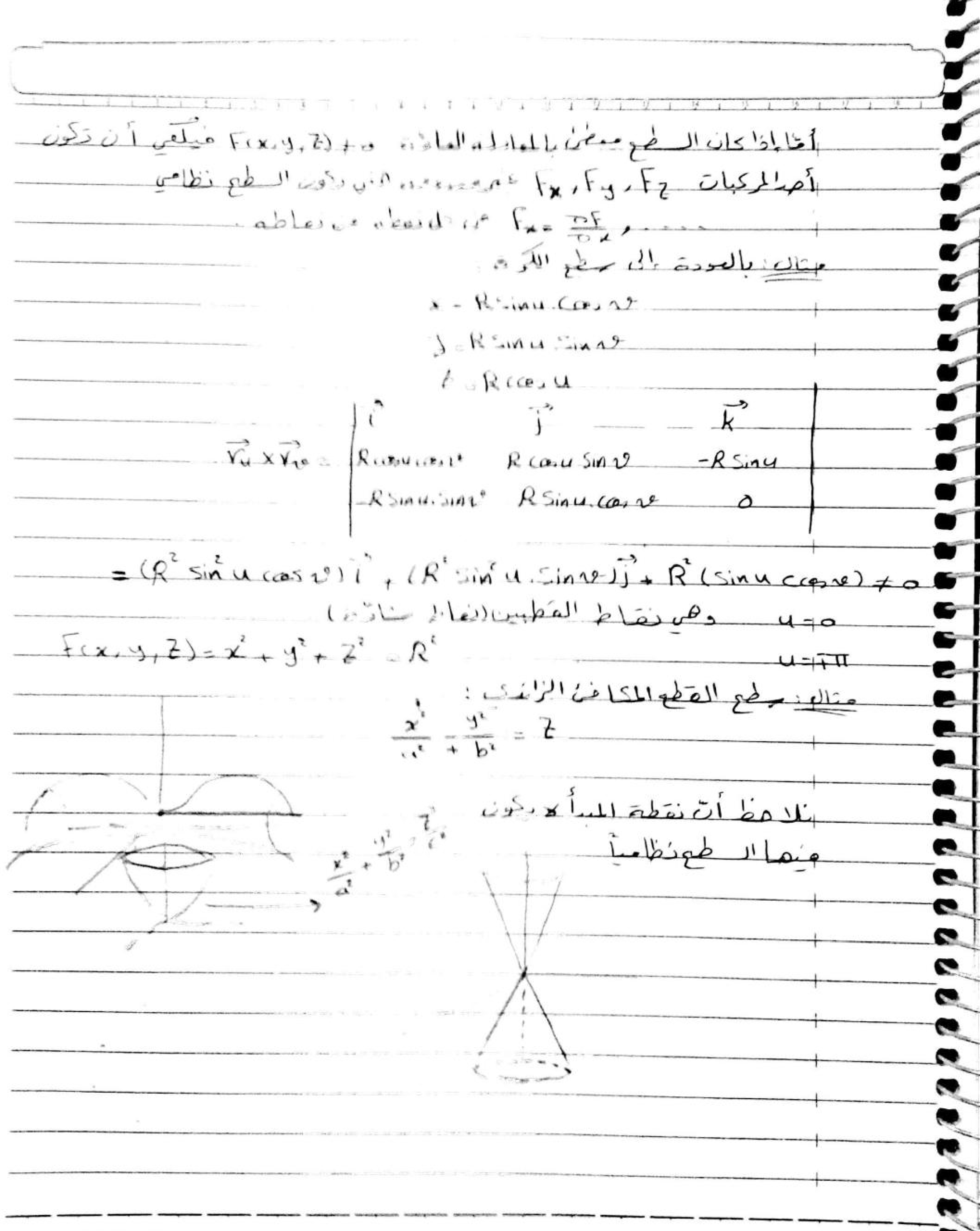
السطح النظامي:

ليكن $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ سطحاً بحيث $\vec{r}(u,v)\in C^k$; $k\geq 1$

نقول عن السطح S المعطى بالمعادلة المتجهة السابقة أنه سطح نظامي من المرتبة k:

إذا كان $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ في كل نقطة من نقاط السطح

$$\vec{r}_u=\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \quad , \quad \vec{r}_v=\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$



أمّا إذا كان السطح معطىً بالمعادلة الضمنية $F(x,y,z) = 0$ فينبغي أن تكون أحد المركبات F_x , F_y , F_z غير معدومة حتى يكون السطح نظامي

$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} , \ldots$ [illegible]

مثال: بالعودة إلى سطح الكرة:

$x = R \sin u . \cos v$

$y = R \sin u \sin v$

$z = R \cos u$

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R \cos u \cos v & R \cos u \sin v & -R \sin u \\ -R \sin u . \sin v & R \sin u . \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (R^2 \sin^2 u \cos v)\vec{i} + (R^2 \sin^2 u . \sin v)\vec{j} + R^2 (\sin u \cos u) \neq 0$$

$u = 0$ وهي نقاط القطبين (النقاط الشاذة)

$u = \pi$

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

مثال: سطح القطع المكافئ الزائدي:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

نلاحظ أن نقطة المبدأ لا يكون فيها السطح نظامياً

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

المستوي المماس والمستقيم الناظم لسطح نظامي:

ليكن S سطحاً نظامياً معطى بالمعادلة $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$
و M_0 نقطة ما منه متجه موضعها $\vec{r}(u_0,v_0)$
المستوي المماس للسطح S في M_0 هو المستوي المار من M_0 وناظمه هو المتجه $(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)_{(u_0,v_0)} \neq 0$ ولنفرض M نقطة متحولة على المستوي المماس متجه موضعها $\vec{r}(u,v)$ عندئذٍ لتغيّر تحولات M من المستوي المماس يبقى المتجه $\vec{M_0M}$ واقعاً فيه أي أن المتجهات الثلاثة $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ ، $\vec{M_0M}$ واقعة دوماً في المستوي المماس لذلك المعادلة المتجهة للمستوي المماس

$$(\vec{M_0M},\vec{r}_u,\vec{r}_v)=\vec{M_0M}\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)=0$$

بإسقاط المعادلة المتجهة على المحاور الإحداثية نحصل على المعادلة التحليلية للمستوي المماس:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}=0$$

تعريف المستقيم الناظم على سطح نظامي:

المستقيم الناظم على سطح نظامي من نقطة ما منه M_0 هو الخط المار من M_0 ومنحاه الناظم على المستوي المماس $(r_u\times r_v)_{(u_0,v_0)}$

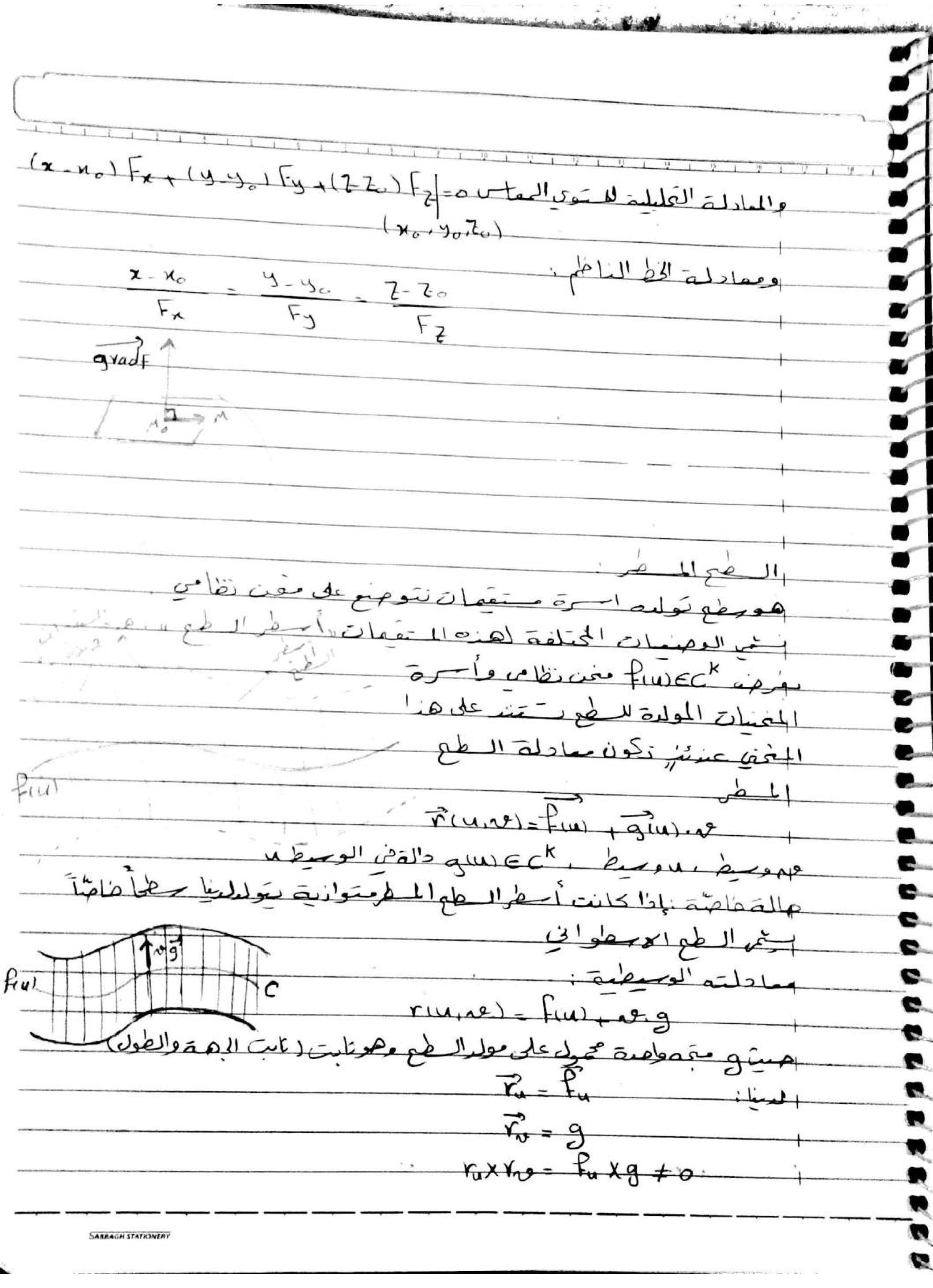
معادلاته الوسيطية:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$

أما إذا كان السطح معطى بالمعادلة الضمنية $F(x,y,z)=0$ فإن المتجه الذي يمثل تدرج الدالة F هو منحى الناظم على السطح $\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)=\text{grad}\,F$.

بفرض $M(x,y,z)$ نقطة متحولة من المستوي المماس عندئذٍ يكون:

$$\vec{M_0M}\cdot\text{grad}\,F=0$$



والمعادلة التحليلية للمستوي المماس $(x-x_0)F_x+(y-y_0)F_y+(z-z_0)F_z=0$ في (x_0,y_0,z_0)

ومعادلة الخط الناظم:

$$\frac{x-x_0}{F_x}=\frac{y-y_0}{F_y}=\frac{z-z_0}{F_z}$$

السطح المسطر:

هو سطح تولده أسرة مستقيمات تتوضع على منحن نظامي
تسمى الوضعيات المختلفة لهذه المستقيمات بأسطر السطح
نفرض $f(u)\in C^k$ منحن نظامي وأسرة
المستقيمات المولدة للسطح تستند على هذا
المنحني عندئذٍ تكون معادلة السطح
المسطر

$$\vec{r}(u,v)=\vec{f}(u)+v\,\vec{g}(u)$$

v وسيط، u وسيط، $g(u)\in C^k$ دالة في الوسيط u

حالة خاصة: إذا كانت أسطر السطح المسطر متوازية يولد لنا سطحاً خاصاً
يسمى السطح الاسطواني
معادلته الوسيطية:

$$r(u,v)=f(u)+v\,g$$

حيث g متجه واحدة محمول على مولد السطح وهو ثابت (ثابت الجهة والطول)

لدينا:

$$\vec{r}_u=f_u$$
$$\vec{r}_v=g$$
$$r_u\times r_v=f_u\times g\neq 0$$

أي أن السطح الاسطواني سطح نظامي من جميع نقاطه.

- المنحنيات ذات الوسيط u هي الخط $f(u)$ والموازية له والمنحنيات ذات الوسيط v هي الأسطر المولدة للسطح.

الصيغة التربيعية الأولى (المسافة على السطح):

ليكن S سطحاً نظامياً معطى بالمعادلة:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) \qquad (r_u \times r_v \neq 0)$$

ولنجد التفاضل التام $d\vec{r}$ لمتجه الموضع $\vec{r}$:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot dv = \vec{r}_u \cdot du + \vec{r}_v \cdot dv$$

نسمي مربع تفاضل $d\vec{r}$ $(d\vec{r}^2)$ بالصيغة التربيعية الأولى للسطح S ونرمز لها بـ I

$$I = (d\vec{r})^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) \cdot (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)$$
$$= \vec{r}_u^2 du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_v du \cdot dv + (\vec{r}_v)^2 dv^2$$

نرمز اختصاراً لـ
$$(\vec{r}_u)^2 = E$$
$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = F$$
$$(\vec{r}_v)^2 = G$$

عندئذٍ تكتب الصيغة التربيعية الأولى للسطح S بالشكل التالي:

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

ملاحظة هامة: الصيغة I هي تربيعية $(d\vec{r})^2$
$$(d\vec{r}^2) \neq 0$$

معنى ذلك المعادلة التربيعية في u, v

$E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = 0$ ليس لها جذور.

أي: $4(F^2 - EG) < 0$

$EG - F^2 > 0$ هذه المتراجحة محققة في أي سطح نظامي.

- ليكن $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ سطحاً نظامياً معرفاً على النطاق D المعين بالشكل:

$$D = \{(u, v) \ , \ u_1 < u < u_2 \ , \ v_1 < v < v_2\}$$

الآن إذا عيّنّا منحنياً من المنطقة D بالمعادلات الوسيطية:

$$u = u(t) \qquad t_1 < t < t_2$$
$$v = v(t)$$

فإن صورته على السطح S هي منحنٍ معطى بالمعادلة المتجهة:

$$\vec{r} = \vec{r}\,(u(t), v(t))$$

لنحسب طول المنحني بين النقطتين $M_1 : r(u(t_1), v(t_1))$ و $M_2 : r(u(t_2), v(t_2))$ على السطح S.

نعلم أن الطول يعطى بالعلاقة:

$$ds = |d\vec{r}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\cdot\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)}$$

$$= \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

وبالتالي طول قوس المنحني الواصل بين M_1, M_2 يعطى بالعلاقة النهائية

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\; dt$$

الزاوية بين منحنيين على سطح:

ليكن f_1, f_2 منحنيين واقعين على السطح النظامي S المعطى بالمعادلة $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$

وليكن $dr = r_u\, du + r_v\, dv$ متجه المماس للمنحني f_1 في النقطة M_0 الموافقة للوسيط t_0

و $\delta r = r_u\, \delta u + r_v\, \delta v$ متجه المماس للمنحني f_2 في نقطة تلاقي المنحنيين f_1, f_2

بالتعريف: الزاوية بين المنحنيين f_1, f_2 في النقطة M_0 هي الزاوية بين المتجهين $d\vec{r}$, $\delta\vec{r}$ وتعطى بالدستور:

$$\cos\theta = \frac{d\vec{r}\cdot\delta\vec{r}}{|d\vec{r}|\,|\delta\vec{r}|} =$$

SARBAGH STATIONERY

$$\frac{(r_u\,du + r_v\,dv)(r_u\,\delta u + r_v\,\delta v)}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\cdot\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G(\delta v)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + \delta u\,dv) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\cdot\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2}}$$

حالات خاصة:

ا- الزاوية بين المنحنيات الوسيطية (الخطوط الوسيطية على السطح):

ب- أن متجه المماس للخط الوسيطي ذي الوسيط u $(v = v_0)$

ج- أن متجه المماس للخط الوسيطي ذي الوسيط v $(u = u_0)$

نعوض في الأخيرة عن $dv = 0$, $\delta u = 0$

ط- أن الزاوية بين المنحنيات الوسيطية:

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{E}\cdot\sqrt{G}}$$

نلاحظ من العلاقة الأخيرة أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الخطوط الوسيطية متعامدة على سطح هو أن يكون $F = 0$ وهذا يتحقق دوماً من السطوح الدورانية

SARBAGH STATIONERY